Série (± intég)

→ Comparaison série int :

↳ $f \searrow$, $f \geq 0$ $\Rightarrow \sum_0^n f(k) - \int_0^n f$ CV et $\sum f(k)$ CV $\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} f$ CV

↳ Var bornée : $f : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$: $\int^{+\infty} |f'|$ CV

$\Rightarrow \sum f(n)$ CV $\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} f$ CV

→ Estimation de sommes

↳ Cesaro : $(\alpha_n) \in]0,+\infty[^{\mathbb{N}}$, $\sum \alpha_k$ DV, $x_n \to \ell$

$$\frac{\sum_0^n \alpha_k x_k}{\sum_0^n \alpha_k} \longrightarrow \ell$$

↳ trouver equiv de $u_n \searrow 0$: $\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} \Rightarrow$ equiv

↳ $o, O, \sim$; si $\sum v_n$ DV et $(u_n) \in]0,+\infty[^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in]0,+\infty[$

$$u_n = \begin{matrix} o \\ O \\ \sim \end{matrix} (v_n) \Rightarrow U_n = \begin{matrix} o \\ O \\ \sim \end{matrix} (V_n)$$

si CV : reste de n à $+\infty$ | non DV, seul $v_n > 0$ est nécessaire (ap cr)

↳ Trick : passer à l'eq diff.

$\longrightarrow$ Compléments : poly

** $\hookrightarrow$ CSSA : $u_n \searrow 0$: $\sum (-1)^n u_n$ CV

* $\hookrightarrow$ d'Alembert : $u_n \in \mathbb{C}^{*\mathbb{N}}$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \longrightarrow L \geq 0$

- $L < 1$, $\sum u_n$ ACV, $L > 1$ $u_n \to +\infty$, $L = 1$ on sait pas.

$\hookrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sum v_n CV \Rightarrow \sum u_n CV \\ \sum u_n DV \Rightarrow \sum v_n DV \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ Duhamel : $(u_n) > 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + \omega_n$ ($a > 0$, $\sum |\omega_n|$ CV)

$\exists C > 0 : u_n \sim \frac{C}{n^a}$ (preuve : faire CV $n^a u_n$)

$\hookrightarrow$ Cauchy : $(u_n) \in [0, +\infty[^{\mathbb{N}}$: $L = \limsup \sqrt[n]{u_n}$

- $L > 1$, u_n non bornée
- $L < 1$ $\sum u_n$ CV

$\hookrightarrow$ Multiplicateurs : $(u_n) \in \mathbb{R}^{+\mathbb{N}}$, $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

(i) $\sum u_n$ DV $\Rightarrow \sum \frac{u_n}{U_n}$ DV

(ii) $\alpha > 1 \Rightarrow \sum \frac{u_n}{U_n^\alpha}$ CV

** $\hookrightarrow$ Abel : $u_n \searrow 0$, $v_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tq les sommes partielles de $\sum v_n$ bornées : $\sum u_n v_n$ CV $\left(\sum_{k=n}^{m} u_k v_k = \sum_{k=n}^{m-1} (u_k - u_{k-1}) V_k + u_m V_m - u_n V_{n-1} \right)$

ou $\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = u_n V_n - u_1 V_0 + \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1}) V_k$

$\hookrightarrow$ Groupements : positifs : OK

quelconques : condition $\begin{cases} |u_{\varphi(n)}| + \dots + |u_{\varphi(n+1)-1}| \to 0 \\ u_{\varphi(n)} > \dots > u_{\varphi(n+1)-1} \text{ de même signe} \end{cases}$